

11 класс

Второй день

11.6. Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ такова, что $a_n - a_k \geq n^3 - k^3$ для любых n и k таких, что $1 \leq n \leq 2022$ и $1 \leq k \leq 2022$. При этом $a_{1011} = 0$. Какие значения может принимать a_{2022} ?

11.7. Произведение цифр натурального числа n равно x , а произведение цифр числа $n+1$ равно y . Может ли оказаться, что произведение цифр некоторого натурального числа m равно $y-1$, а произведение цифр числа $m+1$ равно $x-1$?

11.8. В вершинах правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых нанесены номера $1, 2, \dots, 100$, именно в таком порядке по часовой стрелке. За один ход разрешается поменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, при условии, что номера этих фишек различаются не более чем на k . При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка передвинута на одну позицию по часовой стрелке (по отношению к своему начальному положению)?

11.9. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность ω . Диагонали AC и BD пересекаются в точке P . Точка M – середина отрезка AB . Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает окружность ω в точках K и L . Точка N – середина дуги CD описанной окружности треугольника PCD , не содержащей точку P . Докажите, что точки K, L, M и N лежат на одной окружности.

11.10. Даны неотрицательные числа a, b, c, d такие, что $a + b + c + d = 8$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{a^2 + b + c} + \frac{b^3}{b^2 + c + d} + \frac{c^3}{c^2 + d + a} + \frac{d^3}{d^2 + a + b} \geq 4.$$